Livret de liaison 1ère-Terminale pour la spécialité Mathématiques ou l'option Mathématiques complémentaires

Les mathématiques sont une construction dont chaque étape est importante : afin de pouvoir comprendre et assimiler les nouvelles connaissances de terminale, il est indispensable de maîtriser le programme de 1ère. Vous trouverez donc dans ce livret des exercices qui vous aideront à préparer votre entrée en terminale. Un corrigé est disponible sur le site du lycée.
Nous avons choisi de mettre l'accent sur le second degré, les suites numériques, la dérivation, la fonction exponentielle et le produit scalaire. Nous vous laissons revoir les probabilités conditionnelles et les variables aléatoires de votre côté.
Pour les élèves qui suivront l'enseignement de Maths complémentaires l'an prochain, il est inutile de revoir le produit scalaire.

1. Second degré

Savoir : résoudre une équation du second degré
Etudier le signe d'un trinôme
Etudier la position relative de deux courbes

Exercice 1 *Savoir résoudre une équation du second degré (ou s'y ramenant).*

1. Résoudre les équations suivantes : a) $5x^2+x+4=0$ b) $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}=0$ c) $3x^2-4x-1=2x-4$
2. Résoudre l'équation $\frac{-x^2+2x+8}{2x+4}=0$
3. a) Montrer que, pour tout réel x, on a l'égalité : $3x^4+x^3-16x^2-5x+5=(x^2-5)(3x^2+x-1)$
b) Résoudre alors l'équation $3x^4+x^3-16x^2-5x+5=0$.

Exercice 2 *Résoudre un problème de degré 2.*

Déterminer trois nombres entiers consécutifs, sachant que la somme des carrés de ces nombres est égale à 1 877.

Exercice 3 : *Savoir étudier le signe d'un polynôme de degré 2 (trinôme).*

Dans chacun des cas suivants, étudier le signe de $f(x)$.
1. $f(x)=x^2-7x+10$
2. $f(x)=-6x^2+x-1$

Exercice 4 : *Savoir étudier la position relative de deux courbes.*

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+4x+3$ et $g(x)=x+4$.
Etudier la position relative des courbes C_f et C_g représentant les fonctions f et g.
Indication : On commencera par étudier le signe de $f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Dérivation

Savoir : calculer un taux de variation pour en déduire le nombre dérivé en un point
Déterminer graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en un point
Dériver une fonction en utilisant les formules
Etudier le sens de variation d'une fonction à partir du signe de sa dérivée
Déterminer une équation de tangente

Exercice 1 *Savoir dériver une fonction et étudier ses variations*

Dans chacun des cas ci-dessous, où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$: a) justifier que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$
b) exprimer $f'(x)$ en fonction de x
c) Etablir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

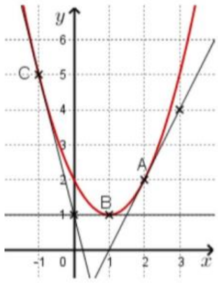
1. $f(x)=2x^3-2x^2+5x+7$ 2. $f(x)=(x^2+1)(6x^2-10)$ 3. $f(x)=\frac{4x+1}{2x^2+1}$

Exercice 2 *Savoir déterminer une équation de la tangente à une courbe*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+1$ et C_f sa courbe représentative
1. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 3.
2. Vérifier votre résultat en traçant, sur votre calculatrice, la tangente T et la courbe C_f.

Exercice 3 ***Savoir lire un nombre dérivée et déterminer une équation de la tangente à une courbe***

On donne, ci-contre, la courbe C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que ses tangentes T_A, T_B et T_C aux points A, B et C d'abscisses respectives 2, 1 et -1.



1. Déterminer graphiquement : a) $f(2)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

   b) $f'(2)$, $f'(1)$ et $f'(-1)$.

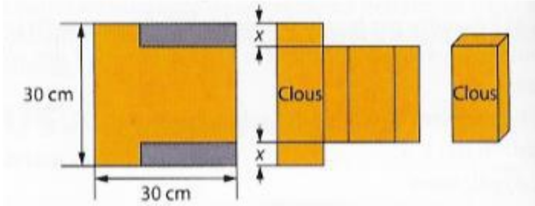
2. En déduire une équation de chacune des tangentes T_A, T_B et T_C.

Exercice 4

PARTIE A Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B Un fabricant envisage la production de boîtes pour emballer des clous en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille de carton carrée de côté 30 cm.



On note x la mesure, en cm, de la largeur des bandes découpées.

1. Expliquer pourquoi les valeurs prises par x appartiennent à l'intervalle $]0; 15[$.
2. a) Soit $V(x)$ le volume, en cm^3 , de la boîte. Exprimer $V(x)$ en fonction de x.

   b) Vérifier que $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
3. Déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal. Quel est ce volume maximal ?

Exercice 5

Un producteur de cinéma souhaite promouvoir son film *Knight of Badassdom*.

Une étude statistique permet d'établir que la probabilité qu'une personne prise au hasard en connaisse le nom après x semaines est donnée par la fonction $p(x) = \frac{3x}{4x+3}$ définie pour x réel positif.

1) Calculer $p(3)$. En déduire la probabilité qu'une personne prise au hasard ne connaisse pas le nom du film après trois semaines de publicité.

2) Combien faudra-t-il de semaines pour que la probabilité qu'une personne prise au hasard connaisse le nom du film soit de $0{,}5$?

3) Étude de la fonction p sur $[0; +\infty[$:

a) Étudier les variations de la fonction p sur son intervalle de définition.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_3 à la représentation graphique $\mathscr{C}$ de p au point d'abscisse 3.

c) On considère la droite $D: y = \frac{3}{4}$. Étudier la position relative de cette droite et de $\mathscr{C}$.

d) À l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau suivant (on arrondira les résultats à 10^{-4} près) :

x	0	10	100	$1\,000$	$10\,000$
$p(x) - \frac{3}{4}$					

e) Tracer la droite D , la tangente T_3 et la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal.

On prendra 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 10 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

f) Déterminer graphiquement le temps nécessaire pour que la probabilité passe de $0{,}6$ à $0{,}7$.

g) Le directeur marketing désire que $80\ \%$ de la population connaisse son film.

A-t-il une chance de voir son souhait se réaliser ? Justifier.

3. Fonction exponentielle

Savoir : définition et relation fonctionnelle vérifiée par la fonction exponentielle

Les propriétés algébriques de la fonction exp

Etude de la fonction exponentielle

Exercice 1 ***Savoir utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.***

Ici, x désigne un réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a) $e^5 \times e^{-2} \times e^3$ b) $(e^5 \times e^2)^4$ c) $\frac{e^{-2} \times (e^3)^2}{e^2}$ d) $\frac{(e^x)^2 \times e^{x+1}}{e^{x-1}}$

Exercice 2 ***Savoir résoudre une équation ou une inéquation où apparaît la fonction exponentielle.***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a) $e^{x+2} < 1$ b) $e^{5x+1} \geq e \times e^{2x}$ c) $e^{x^2} = e$ d) $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$

Exercice 3 ***Savoir étudier une fonction où apparaît la fonction exponentielle.***

On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5-x)e^{x} \qquad g(x) = (e^{x}+1)(e^{x}-3) \qquad h(x) = \frac{x-2}{e^{x}}$$

Pour chacune de ces fonctions, on demande :

a) de justifier qu'elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et d'exprimer la dérivée en fonction de x.

b) d'étudier le signe de la dérivée sur $\mathbb{R}$.

c) de construire le tableau de variations de la fonction.

d) de vérifier le tableau de variations en traçant la représentation graphique de la fonction sur la calculatrice.

Exercice 4 ***Savoir utiliser la formule permettant de calculer la dérivée de $x \mapsto e^{mx+p}$.***

Le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) d'un homme de 70 kg après absorption de deux verres d'alcool à l'instant $x = 0$ est donné, en fonction du temps x (en heures), par la fonction f définie sur $I = [0;4]$ par : $f(x) = 3xe^{-1,25x}$.

a) Montrer que pour tout réel x dans I, on a : $f'(x) = (3-3{,}75x)e^{-1,25x}$.

b) Etablir le tableau de variation de f sur I.

c) En déduire le temps, en minutes, au bout duquel le taux d'alcool est maximal.

4. Suites numériques

Savoir : Calculer les termes d'une suite, qu'elle soit définie explicitement ou par récurrence

Calculer les termes d'une suite avec Python

Reconnaître et utiliser une suite arithmétique (définition par récurrence, définition explicite, calculs de termes, sens de variation)

Somme des n premiers entiers naturels, somme de termes successifs d'une suite arithmétique

Reconnaître et utiliser une suite géométrique (définition par récurrence, définition explicite, calculs de termes, sens de variation)

Calculer la somme $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ où $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$; calculer la somme de termes successifs d'une suite géométrique.

Calculer la somme de termes successifs d'une suite avec Python.

Exercice 1 ***Savoir calculer les premiers termes d'une suite.***

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3n - 2$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 2 \end{cases}$.

1. Pour chacune de ces suites, calculer les quatre premiers termes.
2. On donne ci-dessous, le script Python d'une fonction permettant de calculer le terme de rang n de chacune de ces suites. Compléter ces algorithmes :

```
>>> def u(n):
        u = ...
        return(u)
```

```
>>> def v(n):
        v = ...
        for i in range(1,n+1):
            v = ...
        print(v)
```

Exercice 2 ***Etude d'une suite arithmétique.***

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{50}.
3. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.

Exercice 3 ***Etude d'une suite géométrique.***

Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
2. Calculer u_9.
3. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

Exercice 4

Une entreprise de sécurité lance un nouveau système d'alarme. La première semaine, $2\,000$ unités sont produites puis la production augmentera chaque semaine de 10%.

On désigne par u_n le nombre de systèmes fabriqués la $n^{\text{ième}}$ semaine. On arrondira les résultats à l'unité.

1. Donner u_1 puis calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer la production totale des 20 premières semaines.
5. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de semaines sa production totale aura dépassé 150 000 unités. Elle a donc écrit les deux fonctions Python ci-contre. La première donne la somme des n premiers termes de la

```
def somme(n):
    u = .....
    s = .....
    for i in range(n):
        s = .....
        u = .....
    return(s)
```

```
def seuil():
    n = .....
    while ..... :
        n = .......
    return(n)
```

suite (u_n). Compléter ces deux scripts afin que la 2e fonction indique à partir de quelle semaine la production totale sera supérieure ou égale à 150 000.

Exercice 5 *Etude d'une suite arithmético-géométrique*

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$.

1) a) Calculer, à la main, les quatre premiers termes de la suite (u_n).
   b) Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 3$.
   a) Calculer, à la main, les quatre premiers termes de la suite (v_n).
   b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.
   d) Calculer le huitième terme de la suite (u_n).

Exercice 6

Pour améliorer vos vacances, je vous propose de vous donner 2 500 euros par jour pendant 14 jours.
En contrepartie, je vous demande peu de choses :

- Le 1ier jour, vous me donnez 3 centimes.
- Le 2ième jour, vous me donnez 9 centimes.
- Le 3ième jour, 27 centimes, le 4ième jour, 81 centimes. . . et vous triplez chaque jour la somme du jour qui précède, et ainsi de suite pendant 14 jours.

Êtes-vous assez fou pour refuser mon offre ? Justifier la réponse.

5. Probabilités et variables aléatoires

Savoir : Calculer des probabilités conditionnelles
Tracer un arbre de pondéré adapté à une situation
Appliquer la loi des probabilités totales
Définitions d'événements indépendants
Utiliser une variable aléatoire
Calculer l'espérance, la variance, l'écart type d'une variable aléatoire

Reprenez les exercices que vous avez traités en contrôle, dans les fiches de révisions pour le contrôle commun et l'exercice 1 du contrôle commun.

6. Produit scalaire dans le plan (uniquement pour préparer la spé Maths)

Savoir : Calculer le produit scalaire de différentes manières (notamment la formule avec le cos et celle avec les coordonnées dans un repère orthonormé)
Connaître le théorème d'Al Kashi
Lien entre produit scalaire et vecteurs orthogonaux

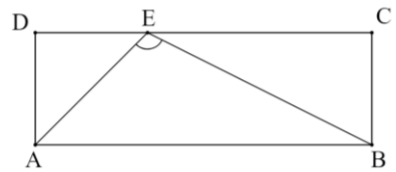
Exercice 1 *Savoir utiliser un repère adapté à une configuration et les propriétés du produit scalaire.*

Soit $ABCD$ un carré. Soient BCF et DCE deux triangles équilatéraux extérieurs au carré $ABCD$.

1) Faire une figure.
2) On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
   a) Justifier que ce repère est orthonormé.
   b) Donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.
   c) Démontrer que les droites (BE) et (AF) sont perpendiculaires.

Exercice 2

On considère le rectangle $ABCD$ ci-contre tel que $BC = 1$ et $AB = 3$.
On note E le point de $[CD]$ tel que $DE = 1$.
Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée d'une mesure de l'angle $\widehat{AEB}$.



1) a) Calculer les longueurs EA et EB.
   b) En déduire une expression de $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$ en fonction de $\cos\left(\widehat{AEB}\right)$.
2) a) En se plaçant dans un repère orthonormé judicieusement choisi, donner les coordonnées des points A, B, C, D et E.
   b) En déduire une valeur exacte de $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$.
3) En déduire, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$ en degrés à 10^{-2} près.

Ce livret a été inspiré du livret de liaison du lycée Portes de l'Oisans - Vizille