Cahier d'exercices pour la rentrée en CPES 1

CPES Paris-Saclay
Année 2026-2027

Ce livret est destiné à vous préparer à reprendre les mathématiques de manière sérieuse, efficace et sereine pour la rentrée en CPES.

Il n'y aura pas de test spécifique dessus le jour de la rentrée, mais certains de ces exercices, en particulier les exercices des sections *Exercices à préparer*, pourront faire partie d'un examen de révision entre mi-septembre et fin septembre.

Il est conseillé de commencer à travailler les exercices de ce livret à partir de mi-août, à raison d'une section tous les 2-3 jours (faire plusieurs sections en une seule journée est inefficace)

1 Calcul algébrique

1.a) Exercices d'échauffement

Exercice 1.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $a \neq b$. Résoudre l'éqution d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$$

Exercice 1.2. *Pour rappel, pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$|x| < a \iff -a < x < a \quad \textit{et} \quad |x| > a \iff (x < -a \textit{ ou } x > a)$$

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

a) $2x + 4 \leq 3$
b) $3 - 2x > 5$
c) $|2x - 5| < 13$
d) $|3 - 4x| \geq 17$

Exercice 1.3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre, suivant les valeurs de m, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 2mx + 1 = 0$$

Exercice 1.4. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Exercice 1.5. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{7}{6}\right\}$

$$\frac{3x-5}{6x+7} \geq -\frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{3x+1}{6x+7}\right)^2 \leq 16$$

2 Exercices à préparer

Exercice 2.1. On considère l'équation (E_1) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_1) : \quad x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$$

1. Montrer que 1 est solution de (E_1).
2. Trouver la valeur des trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

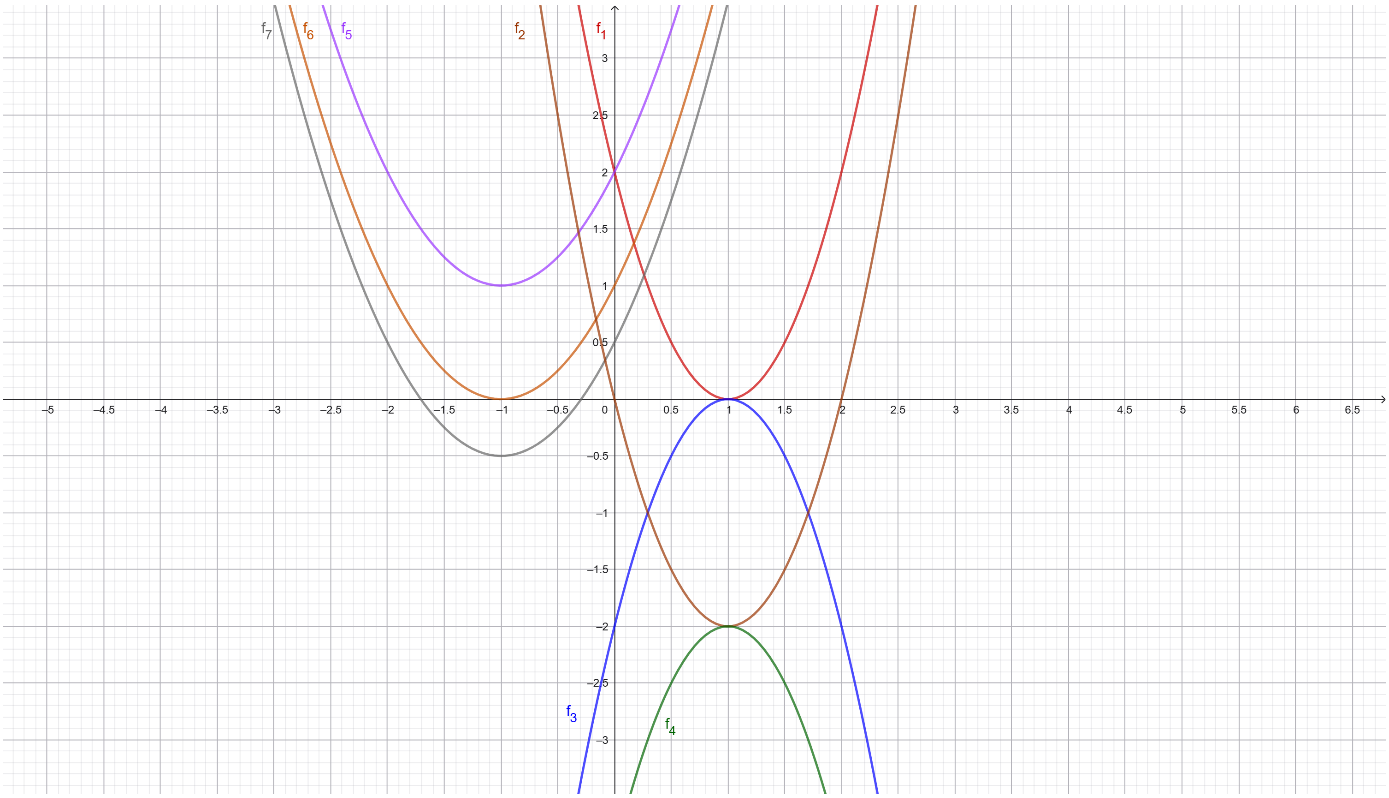
3. Résoudre l'équation (E_1).
4. Soit r une racine de (E_1). On pose $f : x \mapsto e^{rx}$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'''(x) - 8f''(x) + 17f'(x) - 10f(x) = 0$$

Exercice 2.2. Soit a, b, c trois réels, et soit :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

1. Montrer que la fonction f admet un extremum (c'est-à-dire un maximum ou un minimum) global sur $\mathbb{R}$ en $x = -\dfrac{b}{2a}$
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en fonction de a.
3. On considère les trois courbes suivantes :



a) $a = 2, b = 4, c = 2$
b) $a = -2, b = 4, c = -2$
c) $a = 1, b = 2, c = 1$
d) $a = 1, b = 2, c = 2$
e) $a = 1, b = 2, c = \frac{1}{2}$

3 Fonctions usuelles et suites

3.a) Exercices d'échauffement

Exercice 3.1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de e^x et e^y les quantités suivantes :

$$A = e^{2x-y} \qquad B = \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}} \qquad C = \frac{e^{3x}+e^{y-x}}{e^{x+y}+e^{2y-3x}}$$

Exercice 3.2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer en fonction de $\ln(x)$ et $\ln(y)$ les quantités suivantes :

$$D = \ln(x^2y^5) \qquad E = \ln(-\sqrt{x} + e^{\ln(y+\sqrt{x})}), \qquad F = \frac{\ln(y^2 e^{lnx})}{2 + \ln\left(\dfrac{x}{e^2}\right)} \quad (x \neq 1)$$

Exercice 3.3. Dire pour quelles valeurs de x les expressions suivantes ont du sens et les simplifier :

$$G = \ln(\sqrt[3]{e^x}) \qquad H = \ln((e^x + e^{-x})^2 - e^x(e^x + e^{-3x})) \qquad I = e^{-2\ln(2x^4)}$$

Exercice 3.4. Simplifier, sans utiliser la calculatrice, les expressions suivantes :

$$J = \frac{6^{10}}{27 \cdot 3^8} \qquad K = (\sqrt{2})^7 \qquad L = \frac{9^5}{3^8}$$

Exercice 3.5. On considère les suite suivantes :

$$\begin{cases} u_0 &= 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= 2u_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_1 &= 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{3}v_n \end{cases}$$

Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

3.b) Exercices à préparer

Exercice 3.6. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$M = x^5 \cdot (2x)^3 \qquad N = \frac{(xy)^9}{y^7} \qquad O = \frac{y^9 + (-y)^{14}}{y^7 + y^{12}} \qquad P = \frac{(y^2)^{10}}{(y^3)^6}$$

Exercice 3.7. On considère les suites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{1 + e^n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\frac{1}{n+2}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes.

4 Dérivation et applications

4.a) Exercices d'échauffement

Exercice 4.1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto 2x^3 + 2$
2. $f_2 : x \mapsto e^{3x+3}$
3. $f_3 : t \mapsto e^{\cos(2t+1)}$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5. $f_5 : t \mapsto x^t$
8. $f_6 : t \mapsto t^x$
9. $f_7 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
10. $f_8 : x \mapsto \ln(t + x)$
11. $f_9 : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
12. $f_{11} : x \mapsto e^{e^x}$
13. $f_{12} : x \mapsto \sqrt{\ln(x)} - \ln(\sqrt{x})$

4.b) Exercices à préparer

Exercice 4.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $\varphi_n : x \mapsto e^x - nx$.

1. Étudier les variations de la fonction φ_n sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que l'équation $e^x = nx$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.3. On pose :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - \frac{7}{2}x + 4 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier les variations de f sur $]-\infty, 2]$ puis sur $]2, +\infty[$, ses limites en $\pm\infty$ et tracer la courbe représentative de f.

Exercice 4.4.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$$
2. Montrer que pour tout $y \geq 1$:
$$0 < y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1 \leq y + \sqrt{y^2 - 1}$$
3. Soit $y \in [1, +\infty[$, résoudre l'équation d'inconnue $X \in [1, +\infty[$:
$$X + \frac{1}{X} = 2y$$
4. Soit $y \in [1, +\infty[$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

5 Récurrences

5.a) Avertissement

La compréhension des raisonnements par récurrence signifie que l'on sait faire le raisonnement mais également que l'on sait quand le faire. Toutes les questions de ce chapitre ne se traitent donc pas par récurrence, c'est à vous de voir si c'est le cas ou non.

5.b) Exercices d'échauffement

Exercice 5.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1 + \cos(\pi n^2 + 2)}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.

Exercice 5.2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair ; montrer que si n est impair, alors n^2 est impair.
2. On pose $u_0 \in \mathbb{N}$, et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est un entier pair.

Exercice 5.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction. Si elle existe, on note $f^{(0)}$ la n-ème dérivée de f. Par convention, $f^{(0)} = f$. On a donc :

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', \ldots$$

Ici, soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{3x}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3^n e^{3x}$.

Exercice 5.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x\cos(2\pi x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(n) \leq f(n+1)$.
2. Montrer que f n'est pas croissante.

5.c) Exercices à préparer

Exercice 5.5. On pose $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (n+1)v_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \geq n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, v_n est appelée la factorielle de n, et on note pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n! = v_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

avec la convention $0! = 1$.